

Michał SZYMCZAK

Wykorzystanie zmodyfikowanego rozkładu Weibulla w badaniu niezawodności urządzeń AGD

Zawodność stanowi cechę praktycznie wszystkich dóbr wytwarzanych przez człowieka. Jest to jednocześnie najważniejsza cecha jakościowa urządzeń. W momencie gdy produkt zaczyna zawodzić użytkownika, następuje awaria. Można ją zdefiniować jako zdarzenie powodujące, że produkt, urządzenie lub system nie jest w stanie spełniać swoich funkcji. Należy mieć na uwadze, że

działania konserwujące, chroniące przed zużyciem się nie są tu przedmiotem zainteresowania, mimo iż mieszczą się w tej definicji. Niezawodność zaś można scharakteryzować jako prawdopodobieństwo, że dany wyrób nie ulegnie awarii w określonym terminie.

Określenie niezawodności populacji wyprodukowanych urządzeń jest niewątpliwie problemem trudnym i aktualnym. W przypadku gdy próba oceny jednej z najważniejszych cech jakościowych, jaką jest niezawodność, oparta jest na danych uciętych, to niezbędne są modyfikacje wykorzystywanych metod statystycznych stosowanych dla zmiennych w pełni obserwowalnych.

Do analizy danych dotyczących awaryjności urządzeń AGD użyto zmodyfikowanego rozkładu Weibulla. Pozwoliło to na sformułowanie wniosków dotyczących niezawodności w zmiennych warunkach, jakie mają miejsce, gdy wyrób jest eksploatowany przez użytkownika finalnego.

ZAŁOŻENIA TEORETYCZNE BADANIA

Analiza niezawodności urządzeń sprowadzona do badania rozkładu awarii względem czasu użytkowania wymaga dobrze uzasadnionego wyboru modelu teoretycznego. Jest to szczególnie istotne, gdy wybrany model ma postać parametryczną. W przypadku przeprowadzonego badania postać rozkładu wynika bezpośrednio z doświadczenia przedsiębiorstwa oraz konstruktorów maszyny.

Rezultatem wyboru są następujące założenia: urządzenia będące przedmiotem zainteresowania charakteryzują się malejącym prawdopodobieństwem awarii na początku użytkowania nowego wyrobu. Następnie prawdopodobieństwo to zaczyna rosnać wraz ze stopniowym zużywaniem się elementów urządzeń podczas ich eksploatacji. Sposób, w jaki zmienia się to prawdopodobieństwo określony jest przez funkcję hazardu:

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

gdzie:

T — zmienna losowa reprezentująca czas bezawaryjnego działania urządzenia,
 $f(t)$ — funkcja gęstości zmiennej losowej T , a $F(t) = P(T \leq t)$, $t \in R$ jest dystrybuantą zmiennej T . Funkcja $S(t) = 1 - F(t) = 1 - P(T \leq t) = P(T \geq t)$ jest nazywana funkcją przetrwania.

Jednym z modeli potrafiących odzwierciedlić opisane zachowanie jest zmodyfikowany rozkład Weibulla (Lai, Xie, Murthy, 2003). Model ten stanowi przekształcenie dwuparametrycznego rozkładu Weibulla, rezultatem czego jego funkcja hazardu określona zostaje jako:

$$h(t) = \alpha(\beta + \lambda t)t^{\beta-1}e^{\lambda t}$$

z parametrami $\alpha, \beta > 0$ oraz $\lambda \geq 0$. Funkcja gęstości wyrażona jest przez:

$$f(t) = \alpha(\beta + \lambda t)t^{\beta-1}e^{\lambda t}e^{(-\alpha^{\beta}e^{\lambda t})}$$

a funkcja przetrwania odpowiednio:

$$S(t) = e^{(-\alpha^{\beta}e^{\lambda t})}$$

W przypadku gdy $0 < \beta < 1$, funkcja hazardu ma następujące własności:

- $h(t)$ jest na początku malejąca, a następnie rosnąca, posiadając charakterystyczny kształt „wannы” (ang. *Bathtub curve*),
- $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \infty$ oraz $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$,
- moment zmiany funkcji hazardu z malejącej w rosnącą określony jest przez t^* jako:

$$t^* = \frac{\sqrt{\beta} - \beta}{\lambda}$$

Parametry modelu szacowane są przy pomocy metody największej wiarygodności (MNW).

BADANIE EMPIRYCZNE

Analizę niezawodności urządzeń przeprowadzono na podstawie rzeczywistych obserwacji rynku. Dane, przy użyciu których został oszacowany model, pochodzą z serwisów gwarancyjnych i są własnością badanego przedsiębiorstwa. Zawierają one informacje o wszystkich naprawach przeprowadzonych do marca 2011 r. w okresie gwarancyjnym¹ urządzeń produkowanych w pierwszych półroczach lat 2000—2008.

Po wygaśnięciu gwarancji mogą mieć miejsce następujące zdarzenia: jeżeli wyrób jest objęty gwarancją przedłużoną do 5 lat, można posługiwać się danymi serwisowymi. Ponadto możliwe jest, że użytkownik dokona naprawy maszyny w serwisie na własny koszt, zostanie więc zaobserwowana awaria. W innym wypadku brak jest jakiegokolwiek informacji o stanie urządzenia po okresie gwarancji, a zatem mamy do czynienia ze zjawiskiem znanym jako prawostronne cenzurowanie obserwacji.

¹ Okres gwarancyjny w przypadku badanych urządzeń wynosi 24 miesiące.

Estymując parametry modelu opisującego problem należy przyjąć założenia co do wpływu mechanizmu cenzurowania na procedury wnioskowania statystycznego, dotyczącego badanej zmiennej (Lawless, 2003). W analizowanym przypadku przyjęto założenie, iż rozważany model jest modelem cenzurowania nieinformatywnego (Rossa, 2003; Rossa, 2005), zatem możliwa staje się identyfikowalność rozkładu badanej zmiennej. W wyniku cenzurowania zmienna losowa T , reprezentująca czas poprawnego działania urządzenia, jest nieobserwowalna. Obserwowalną zmienną stanowi zmienna losowa X , oznaczająca czas od momentu zakupu urządzenia aż do wystąpienia pierwszego ze zdarzeń — awarii lub cenzurowania. Prawdziwa jest zatem nierówność $T \geq X$. Drugą obserwowalną zmienną jest zero-jedynkowa zmienna wskaźnikowa δ , będąca oznaczeniem, czy obserwacja powstała w wyniku cenzurowania czy awarii:

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{w przypadku braku cenzurowania} \\ 0 & \text{w przypadku zaobserwowania cenzurowania} \end{cases}$$

Realizacje pary zmiennych losowych (X, δ) wpływają zatem na możliwość identyfikacji rozkładu nieobserwowalnej zmiennej T .

W celu otrzymania estymatora MNW parametrów modelu dla danych cenzurowanych konieczne jest uwzględnienie zarówno zaobserwowanych okresów trwania zjawiska, jak i mechanizmu cenzurowania. Funkcją wiarygodności w przypadku występowania rozpatrywanego rodzaju cenzurowania jest funkcja postaci²:

$$L = \prod_{i=1}^n f(t_i)^{\delta_i} S(v)^{1-\delta_i} \quad (1)$$

gdzie:

δ_i — zmienna wskaźnikowa dla i -tej obserwacji,

v — ustalony moment cenzurowania.

Korzystając z powyższego wzoru (1) i podstawiając odpowiednio funkcję gęstości zmodyfikowanego rozkładu Weibulla oraz funkcję przetrwania otrzymuje się:

$$L = \prod_{i=1}^n \left[\alpha e^{\lambda t_i} (\beta + \lambda t_i) t_i^{\beta-1} e^{(-\alpha t_i^\beta e^{\lambda t_i})} \right]^{\delta_i} \left[e^{(-\alpha t_i^\beta e^{\lambda t_i})} \right]^{1-\delta_i}$$

² Murthy, Xie, Jiang (2004), s. 63.

Aby uprościć estymację parametrów użyty został logarytm funkcji wiarygodności:

$$\ln L = \sum_{i=1}^n \delta_i [\ln \alpha + \lambda t_i + \ln(\beta + \lambda t_i) + (\beta - 1) \ln t_i - \alpha t_i^\beta e^{\lambda t_i}] + \sum_{i=1}^n (1 - \delta_i) (-\alpha t_i^\beta e^{\lambda t_i})$$

**TABL. 1. WIELKOŚĆ PRODUKCJI I AWARIE URZĄDZEŃ AGD
PRODUKOWANYCH W BADANYCH OKRESACH**

Okres produkcji	Produkcja urządzeń w sztukach	Liczba zaobserwowanych awarii	
		ogółem	w trakcie trwania gwarancji
01.2000—06.2000	102323	17473	15994
01.2001—06.2001	126576	11664	10349
01.2002—06.2002	235864	27018	23458
01.2003—06.2003	233050	30380	26747
01.2004—06.2004	344637	45483	38658
01.2005—06.2005	340749	38361	32923
01.2006—06.2006	427023	41938	36434
01.2007—06.2007	412638	43240	37492
01.2008—06.2008	393876	27901	27797

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

**TABL. 2. OSZACOWANIA PARAMETRÓW ZMODYFIKOWANEGO ROZKŁADU WEIBULLA
DLA PRODUKOWANYCH URZĄDZEŃ AGD**

Okres produkcji	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	t^*
01.2000—06.2000	0,0106	0,5972	0,0191	9,19
01.2001—06.2001	0,0111	0,5783	0,0118	15,44
01.2002—06.2002	0,0137	0,5854	0,0103	17,45
01.2003—06.2003	0,0119	0,5711	0,0234	7,89
01.2004—06.2004	0,0102	0,5416	0,0328	5,92
01.2005—06.2005	0,0078	0,5633	0,0332	5,64
01.2006—06.2006	0,0071	0,5611	0,0340	5,53
01.2007—06.2007	0,0079	0,5710	0,0316	5,84
01.2008—06.2008	0,0071	0,8565	-0,0169	—

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

Analizując wpływ parametrów zmodyfikowanego rozkładu Weibulla z punktu widzenia konstrukcji maszyn, parametrem decydującym o możliwości długiej trwałości urządzeń jest λ . Parametr ten decyduje o momencie, w którym funkcja hazardu osiąga minimum. Pozostałe parametry decydują o kształcie przyjmowanym przez funkcję hazardu (β) oraz przesunięciu tej funkcji w pionie (α). Moment użytkowania urządzenia, w którym prawdopodobieństwo awarii osiąga minimum określa t^* .

Otrzymane wartości poziomów krytycznych dla oszacowań parametrów (tabl. 2) wskazują na istotność wszystkich parametrów, niezależnie od badanego okresu produkcji. Wiarygodność oszacowań jest silnie związana z upływem czasu od momentu wyprodukowania urządzenia. Czas ten ma wpływ na obserwowalność awarii. Należy przy tym mieć na uwadze, iż aby otrzymać całkowity czas jaki upłynął od momentu wyprodukowania urządzenia do wystąpienia awarii, należy do znanego czasu użytkowania dodać czas magazynowania, który może wynosić nawet kilkanaście miesięcy.

W przypadku produkcji z ostatnich lat słaba obserwowalność awarii już w okresie gwarancyjnym, a szczególnie pod koniec, może skutkować obciążonymi szacunkami parametrów. Ponadto dla każdego kolejnego okresu produkcji skraca się możliwy czas, w którym można zaobserwować awarię. Dla 2001 r. wynosi on 10 lat, z kolei dla 2008 r. — 3 lata. Brak informacji o awariach w danym okresie jest zatem związany z czasem, który jeszcze nie upłynął. Z tego względu ujemne oszacowania parametru λ dla modelu dotyczącego 2008 r. należy uznać za niewłaściwe. Podobnie, w przypadku gdy oszacowania tego parametru przekraczają 0,02, należy zakwalifikować je jako przeszacowane. Przyczyny te utwierdzają w przekonaniu, iż wybrany rozkład dla danych o tym charakterze byłby bardziej użyteczny jako narzędzie do porównania urządzeń pochodzących z tych samych okresów produkcji, lecz z różnych fabryk.

Miary dokładności prognoz awarii na kolejne miesiące użytkowania na podstawie oszacowań parametrów zmodyfikowanego rozkładu Weibulla zawiera tabl. 3.

TABL. 3. MIARY DOKŁADNOŚCI PROGNOZ LICZBY AWARII URZĄDZEŃ AGD

Rok produkcji	Średni błąd	Średni absolutny błąd	Średni błąd procentowy	Średni absolutny błąd procentowy	Błąd średnio-kwadratowy	Współczynnik rozbieżności I^a
2000	44	179	55	69	60059	0,24
2001	42	207	104	120	82089	0,24
2002	91	385	60	68	415192	0,24
2003	85	408	36	48	370509	0,23
2004	122	633	31	45	888499	0,25
2005	70	482	22	39	434923	0,22
2006	157	571	31	43	673104	0,24
2007	182	599	33	42	822213	0,25

^a Współczynnik rozbieżności I , znany również jako współczynnik rozbieżności Theila, przyjmuje wartość z przedziału $\langle 0; 1 \rangle$ w taki sposób, że dla doskonałej replikacji wartości empirycznych przez model osiąga lewy kraniec, natomiast wartości bliskie 1 oznaczają, że prognoza nie jest lepsza od prognozy naiwnej.

Źródło: opracowanie własne.

Dokonując oceny wybranego modelu dla badanych okresów produkcji na podstawie tabl. 3 należy stwierdzić, że istnieją różnice między liczbami awarii prognozowanymi przez model a zaobserwowanymi w rzeczywistości. Niedoskonałość modelu związana jest z różnymi przyczynami. Wymienić można tu skrajnie wysoką liczbę zgłoszeń w pierwszym miesiącu użytkowania, która uwzględnia nie tylko faktyczne awarie urządzeń, a której model nie jest w stanie odwzorować. Inną przyczyną są znaczne wahania liczby awarii w okresie dwóch pierwszych rocznic zakupu. Błędy prognozy modelu mogłyby zostać zredukowane dzięki zastosowaniu dodatkowych zmiennych objaśniających te okresy. Możliwości prognozy powinny się także zwiększyć dzięki uwzględnieniu informacji o liczbie złomowanych urządzeń oraz poprawieniu efektywności systemu zbierania danych.

Z punktu widzenia konstrukcji i zastosowanych rozwiązań technologicznych najodpowiedniejszym modelem jest model urządzeń wyprodukowanych w pierwszym półroczu 2001 r. Oszacowane parametry dla tego okresu wskazują na wzrastanie prawdopodobieństwa awarii począwszy od szesnastego miesiąca użytkowania. Dziesięcioletni czas użytkowania przetrwa bezawaryjnie według modelu ponad 48% maszyn.

Traktując oszacowania parametrów modelu dla produkcji z 2001 r. jako wzorcowe, można przyjąć przy estymacji dla innych lat restrykcję, że parametr λ jest stały i wynosi tyle, co dla modelu z roku wzorcowego. Dodatkowym uzasadnieniem restrykcji jest konstrukcyjny wymóg stabilności tego parametru. Oszacowania modeli dla lat 2000—2008, przy warunku $\lambda = 0,0118$, zawiera tabl. 4.

TABL. 4. OSZACOWANIA PARAMETRÓW ZMODYFIKOWANEGO ROZKŁADU WEIBULLA PRZY WARUNKU $\lambda = 0,0118$

Okres produkcji	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	t^*
01.2000—06.2000	0,0103	0,6650	0,0118	12,8
01.2001—06.2001	0,0111	0,5783	0,0118	15,4
01.2002—06.2002	0,0136	0,5732	0,0118	15,6
01.2003—06.2003	0,0113	0,6808	0,0118	12,2
01.2004—06.2004	0,0092	0,7486	0,0118	9,9
01.2005—06.2005	0,0071	0,7673	0,0118	9,4
01.2006—06.2006	0,0065	0,7626	0,0118	9,9
01.2007—06.2007	0,0073	0,7491	0,0118	9,9
01.2008—06.2008	0,0085	0,5812	0,0118	15,4

Źródło: opracowanie własne.

Wykresy 1—3 przedstawiają funkcje hazardu, gęstości oraz przetrwania odpowiadające oszacowaniom parametrów.

Na podstawie otrzymanych wyników, wnioski dotyczące awaryjności urządzeń są następujące: najlepszym z punktu widzenia niezawodności okresem produkcji jest ostatni z analizowanych (I półrocze 2008 r.), natomiast najgorszym — produkcja z I półrocza 2004 r. Klienci oczekiwać będą nieustannej poprawy niezawodności. Producentowi z kolei zależy na maksymalizacji zysków. Biorąc zatem pod uwagę założenia konstrukcyjne wytwórcy, które w najlepszym stopniu powinny odwzorować jego strategię, najbardziej pożądanym w tym kontekście modelem staje się model z 2002 r.

Podsumowanie

W artykule przedstawiono wyniki badań niezawodności urządzeń AGD, przy zastosowaniu zmodyfikowanego rozkładu Weibulla. Pozwala to na porównanie zmian w niezawodności wybranych urządzeń w ostatnich latach, a także odniesienie ich do wymagań jakościowych zarówno klienta, jak i producenta.

Zastosowana metoda oceny niezawodności urządzeń wybranego przedsiębiorstwa cechuje się wieloma ograniczeniami. Stanowi ona jednak próbę oceny jakości produktu na podstawie jego rzeczywistego zachowania się w eksploatacji i weryfikacji przez konsumentów.

W fazie użytkowania zakupionego produktu przez klienta statystyczna analiza niezawodności może odpowiedzieć na pytanie, jaka jest faktyczna niezawodność urządzenia i czy jest ona zgodna z oczekiwaniami konstrukcyjnymi. Poza doбором odpowiednich metod oceny niezbędne są rzetelne dane serwisowe oraz sprawny przepływ informacji. Otrzymana wiedza, nawet jeśli okaże się bolesna, jest niezwykle cenna dla przyszłych działań przedsiębiorstwa. Można bowiem odpowiedzieć na pytanie, w którym miejscu dotychczasowe działania zawiodły, jaka jest tego przyczyna i jak ją wyeliminować. Należy pamiętać, że rezultaty takiego badania mogą być aktualne jeszcze przez długi czas, gdyż produkcja określonego modelu urządzenia może trwać bardzo długo.

Znaczący wpływ na wyniki estymacji rozkładu czasu trwania zjawisk ma moment i rodzaj cenzurowania, co miało swój wyraz w wynikach oszacowań, niezależnie od bardzo dużej liczby dostępnych obserwacji.

Lepszych oszacowań modelu i dokładniejszych prognoz należy oczekiwać w przypadku badania jednorodnych środowisk, takich jak kraj, w którym użytkowane jest urządzenie, podobny rodzaj klienta itp. Różna kultura obsługi urządzeń, jak i podejście użytkownika mogą być przedmiotem analizy dyskryminacji lub skupień, prowadzącej do wyodrębnienia grup charakteryzujących się pod tym względem wysokim podobieństwem.

LITERATURA

- Lai C., Xie M., Murthy D. N. P. (2003), *A Modified Weibull Distribution*, „IEEE Transactions on Reliability”, T. 52, No. 1
- Lawless J. (2003), *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, New Jersey
- Murthy D. N. P., Xie M., Jiang R. (2004), *Weibull models*, New Jersey
- Rossa A. (2003), *Niestandardowe metody estymacji rozkładów czasu trwania zjawisk w aspekcie ich zastosowań w ekonomii i ubezpieczeniach*, Łódź
- Rossa A. (2005), *Metody estymacji rozkładu czasu trwania zjawisk dla danych cenzurowanych oraz ich zastosowania*, Łódź

SUMMARY

Forecasting of the manufactured appliances' reliability is a difficult and still considered issue. The article presents results of the household appliances' reliability research with the application of a modified Weibull distribution. In the first part there are shown theoretical assumptions of the research together with choice grounds of the applied model. Estimates of parameters of the model were based on a data set, which contained censored observations. This information is derived from actual observations of warranty services of a selected production company. The second part of the paper contains the results of estimates obtained using maximum likelihood methods. It also contains comments on the usefulness of the results. The study allowed to compare changes in the reliability of the selected appliances in recent years, as well as to relate them to the quality requirements — both customer and manufacturer.

РЕЗЮМЕ

Прогнозирование надежности изготовленного оборудования является вопросом сложным и все время рассуждаемым. В статье представляются результаты обследования оборудования домашних хозяйств с использованием модифицированного распределения Weibulla. В первой части разработки характеризуются теоретические принципы обследования вместе с обоснованием выбора используемой модели. Параметры модели были оценены по данным содержащим наблюдения полученные из пунктов гарантийного обслуживания избранного производственного предприятия. Вторая часть статьи представляет результаты оценок полученных при использовании метода самой большой достоверности. Эта часть содержит также оценку по полезности полученных результатов. Проведенное обследование позволило сравнить изменения в области надежности избранного оборудования за последние годы, а также отнести их к качественным требованиям — как клиента, так и производителя.